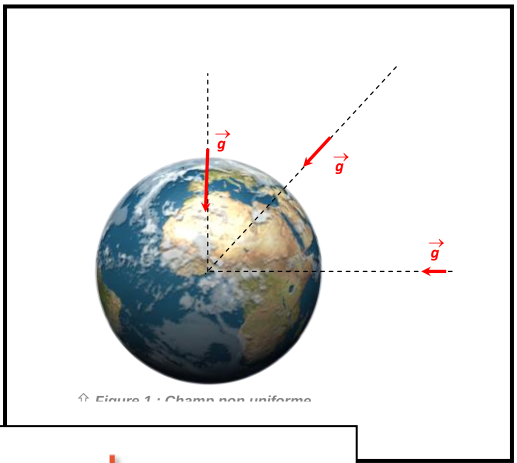
PARTIE 4 : MECANIQUE
Séquence 2 : Mouvement dans un champ uniforme
Séance 3 : Mouvements dans un champ de pesanteur uniforme

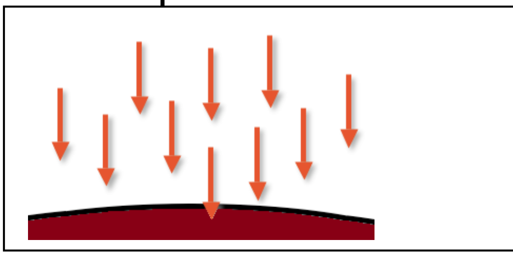
I. Champ uniforme



$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$$

P en N
m en kg
g en N/kg

Les caractéristiques du champ de pesanteur terrestre sont :
- direction : radiale
- sens : vers le centre de la Terre
- intensité : g = 9,8 N·kg $^{-1}$



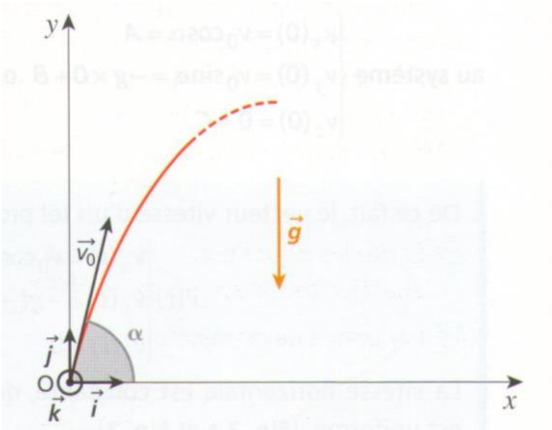
Donc, à l'échelle de la Terre, le champ de pesanteur n'est pas uniforme mais à l'échelle humaine, ce champ peut raisonnablement être considéré comme uniforme.

II. Etude d'un cas de chute libre

1. Hypothèse d'étude

Un point matériel de masse m (bille par exemple) est lancé à l'instant t = 0 avec une vitesse $\vec{v}_O$ faisant un angle α par rapport à l'horizontal (angle de tir).
On néglige l'action de l'air (poussée d'Archimède, frottements) sur le projectile.
On se propose d'étudier le mouvement de **chute libre** sous la seule action du champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\,\vec{k}$

- Système étudié : {bille}
- Référentiel d'étude : terrestre supposé galiléen
- Bilan des forces : - poids $\vec{P}$



Le plan (Oxy) est appelé **plan de tir** : il contient les vecteurs $\vec{v}_O$ et $\vec{g}$

Dans ce système d'axes, les coordonnées du vecteur initial sont : $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$

2. Equation du mouvement

L'équation du mouvement se déduit de l'application **du théorème du centre d'inertie (principe fondamentale de la dynamique**) au point matériel M dans le référentiel :

$$m\,\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{P} = m\,\vec{g}$$

Soit $\quad \vec{a} = \vec{g} = -\,g\,\vec{j}$

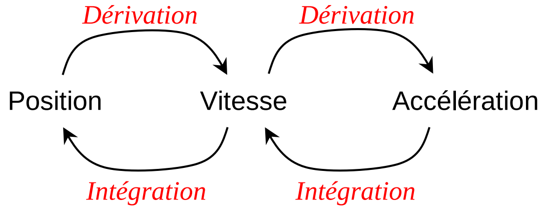
Autre écriture : $\quad \vec{a} \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \\ a_z(t) = 0 \end{cases} \qquad (1)$

L'accélération, et donc le mouvement du projectile, ne dépendent pas de sa masse : **deux projectiles de masses différentes en chute libre ont le même mouvement.**

$a_z = -\,g = c^{te}$, le mouvement est **uniformément varié**

a. Expression du vecteur vitesse

Sachant que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, l'expression de $\vec{v}_G$ est obtenue en intégrant par rapport au temps les trois équations de la relation (1).



Soit : $\quad \vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = A \\ v_y(t) = -gt + B \\ v_z(t) = C \end{cases}$ $\quad$ où A, B et C sont des constantes d'intégration

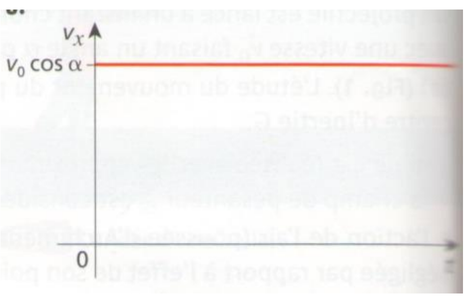
Á l'instant initial, $\vec{v}(0)\begin{cases} v_{0x} = A = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = -g \times 0 + B = B = v_0 \sin\alpha \\ v_{0z} = C = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} A = v_0 \cos\alpha \\ B = v_0 \sin\alpha \\ C = 0 \end{cases}$

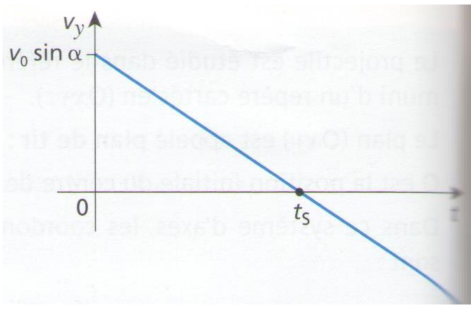
De ce fait le vecteur vitesse d'un tel projectile est donné par :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -g\,t + v_0 \sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

Analyse des résultats :

- La vitesse horizontale est constante, donc le mouvement horizontal est **uniforme**.
- Le mouvement vertical est uniformément varié car l'accélération verticale est constante
- Il n'y a pas de mouvement suivant l'axe des z.





b. Expression du vecteur position

Par intégration on détermine les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ en tenant compte des conditions initiales

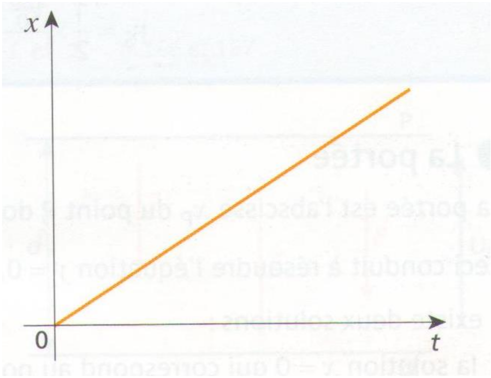
Soit : $\overrightarrow{OG}(t)\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)t + D \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + E \\ z(t) = F \end{cases}$ où D, E et F sont des constantes d'intégration

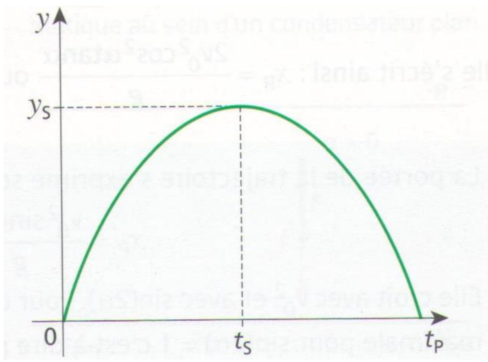
Á l'instant initial, $\overrightarrow{OG}(0)\begin{cases} x(0) = (v_0 \cos\alpha) \times 0 + D = 0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}g \times 0^2 + (v_0 \sin\alpha) \times 0 + E = 0 \\ z(0) = F = 0 \end{cases}$ soit D = E = F = 0

Les coordonnées du vecteur position s'écrivent :

$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Remarque : le **mouvement se déroule dans le plan** xOy car $z = 0$





Ainsi les équations horaires définissant le mouvement de ce boulet sont :

Pour l'accélération :
$a_x(t) = 0$
$a_y(t) = -g$
$a_z(t) = 0$

Pour la vitesse :
$v_x(t) = v_0 \cos\alpha$
$v_y(t) = -g \times t + v_0 \sin\alpha$
$v_z(t) = 0$

Pour la position :
$x(t) = v_0 \cos\alpha \times t$
$y(t) = -\frac{1}{2}\, gt\ 2 + v_0 \sin\alpha \times t$
$z(t) = 0$

c. Equation cartésienne de la trajectoire

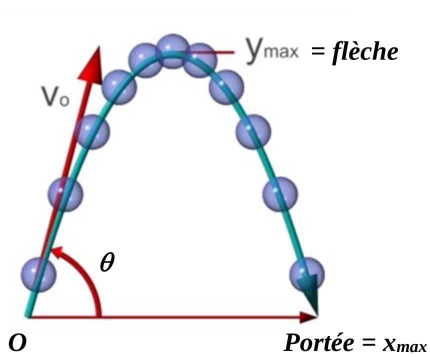
On établit l'équation de la trajectoire en éliminant le paramètre t des équations horaires afin d'exprimer y en fonction de x.

De l'équation x, on tire : $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

soit $z = -\frac{g}{2(v_0 \cos\alpha)^2} x^2 + \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} x = -\frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2} x^2 + (\tan\alpha) x$

La trajectoire d'une chute libre avec vitesse initiale quelconque est une portion de parabole située dans le plan vertical contenant $\vec{v}_0$

Figure 4 ⇨ *Trajectoire parabolique*



Remarque :
On appelle **portée p**, la distance horizontale maximale que peut atteindre le projectile.
On appelle **flèche**, la hauteur maximale atteinte.