PARTIE 4 : MECANIQUE
Séquence 1 : Cinématique
Séance 1 : Les outils de la mécanique

La **cinématique** est l'étude du mouvement indépendamment des causes qui le provoquent.

I. Système mécanique

Un système mécanique est le solide ou l'ensemble de solides dont on va étudier le mouvement.

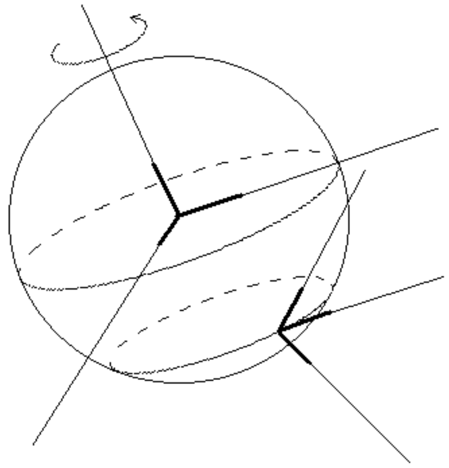
II. Centre d'inertie

C'est un point particulier du système, noté **G**, dont le mouvement est généralement plus simple à décrire.
L'étude du mouvement des systèmes est ramenée à celle de leur centre d'inertie G.

III. Référentiel et repère

Le référentiel est le solide de référence par rapport auquel on étudie le mouvement d'un système. Son choix est arbitraire.
A chaque référentiel est associé :

- un **repère d'espace** qui donne la position du système
- un **repère de temps** pour associer une date à chaque position : l'origine des dates est fixée arbitrairement et une horloge mesure la durée entre 2 dates.



⇧ *Figue 1 : Référentiel géocentrique ① et référentiel terrestre ②*

Ne pas confondre le **référentiel terrestre** immobile à la surface de la Terre (ex : arbre) et le **référentiel géocentrique** placé au centre de la Terre.

IV. Outils de description de mouvements

1. Le vecteur position

La position d'un système à la date t est donné par le vecteur position. On utilise souvent un repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ lié au référentiel choisi tel que :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \boldsymbol{x_G\vec{\imath} + y_G\vec{\jmath} + z_G\vec{k}}. \textit{ (on se limitera à un vecteur position à 2 dimensions)}$$

L'ensemble des positions successives du système constitue sa **trajectoire** (elle dépend du référentiel choisi).
Lors d'un mouvement, les valeurs de x_G et y_G sont des fonctions du temps (varient en fonction du temps).

2. Le vecteur vitesse

Le **vecteur vitesse** caractérise la variation du vecteur position en fonction du temps en un point de la trajectoire.

La vitesse moyenne à l'instant t_2 est la vitesse moyenne entre les instants t_1 et t_3 très voisins

$$\vec{v}_G(t_2) = \frac{\overrightarrow{G_1G_3}}{t_3 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OG_1} - \overrightarrow{OG_3}}{t_3 - t_1} = \frac{\Delta\overrightarrow{OG}}{\Delta t}$$

Pour obtenir la **vitesse instantanée**, il faut tendre Δt vers 0 : $\vec{v}_G(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OG}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{v}_G(t) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}}}$$

Le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

Expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$\overrightarrow{OG} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ donc $\vec{v}_G = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath}$ or par définition $\vec{v}_G = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$

Par identification on obtient donc : $v_x = \frac{dx}{dt}$ $v_y = \frac{dy}{dt}$

Autre notation : $v_x = \dot{x}$ $v_y = \dot{y}$

Caractéristiques du vecteur vitesse $\boldsymbol{\vec{v}_G(t)}$:

- son point d'application est G
- sa direction est tangente à la trajectoire au point G.
- son sens est celui du mouvement.
- sa valeur (ou norme) est $\|\vec{v}\| = \boldsymbol{v} = \sqrt{\boldsymbol{v^2{}_x + v^2{}_y}}$

3. Le vecteur accélération

Le vecteur accélération rend compte de la variation du vecteur vitesse entre deux instants très proches.

$$\vec{a}_G(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{v_G}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}$$

$\vec{v}_G$ est donc la vecteur vitesse instantanée à la date t et s'exprime en $m.s^{-1}$
$\vec{a}_G$ est le vecteur accélération qui s'exprime en $m.s^{-2}$

Expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

On sait que $\boxed{\vec{a}_G(t) = \frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}}$ or $\vec{v}_G(t) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$

Donc $\boxed{\boldsymbol{\vec{a}_G(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath}}}$

Par définition $\vec{a}_G = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath}$
Par identification on obtient donc :

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt}$$

Autre notation : $a_x = \ddot{x}$ $a_y = \ddot{y}$

La valeur (ou norme) du vecteur accélération à un instant t est : $\boxed{\boldsymbol{\|\vec{a}\| = a = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y}}}$

V. Descriptions de quelques mouvements

Les mouvements sont caractérisés par les vecteurs vitesse et accélération.

1. Mouvements rectilignes

Un mouvement est **rectiligne** si sa **trajectoire est une droite**.

a) Mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement est rectiligne uniforme si le vecteur vitesse est constant : $\boldsymbol{\vec{v}_G = \overrightarrow{c^{te}}}$
$\boldsymbol{\vec{v}_G}$ garde même direction, même sens et sa valeur reste constante, indépendante du temps.

Si $\boldsymbol{\vec{v}_G = \overrightarrow{c^{te}}}$ alors le vecteur accélération est à chaque instant un vecteur nul $\boldsymbol{\vec{a}_G(t) = \vec{0}}$

Remarque : un mouvement peut être uniforme sans être rectiligne : dans ce cas seule sa valeur reste constante.

b) Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Dans un référentiel donné, un système a un **mouvement uniformément varié, si son vecteur accélération a toujours même direction (celle de la trajectoire), même sens et même valeur** : $\boldsymbol{\vec{a}_G(t) = \overrightarrow{c^{te}}}$.

Si $\vec{a}_G(t)$ a **même sens** (**sens opposé**) que celui du mouvement alors le mouvement est **accéléré** (**ralenti**)

2. Mouvements circulaires

Le mouvement est circulaire si sa trajectoire est un cercle ou une portion de cercle de rayon R.

a) Mouvement circulaire non uniforme

La valeur de l'accélération n'est pas constante et $\boldsymbol{\vec{v}_G}$ est tangent à la trajectoire

$\vec{a}_G(t)$ peut se décomposer selon : $\vec{a}_G(t) = \overrightarrow{a_N} + \overrightarrow{a_T}$

avec : $\boxed{a_N = \frac{v^2}{R}}$: accélération normale, elle est **centripète** (dirigée vers le centre)

$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt}}$: accélération tangentielle

b) Mouvement circulaire uniforme

La valeur de la vitesse et celle de l'accélération sont constantes.

Le vecteur $\boldsymbol{\vec{v}_G}$ (**tangent** à la trajectoire) n'est pas constant puisqu'il change de direction mais sa valeur v reste constante (mouvement uniforme).

$v = c^{te}$ soit $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$

L'expression de $\vec{a}_G$ devient : $\vec{a}_G(t) = \overrightarrow{a_N} + \overrightarrow{a_T} = \overrightarrow{a_N} + \vec{0} = \overrightarrow{a_N}$

Le vecteur accélération est alors **centripète** et a pour valeur $\boxed{a_N = \frac{v^2}{R}}$